MATEMATIKA OLIMPIÁSZ

KÖRZETI SZAKASZ

2011. január 22.

IX. OSZTÁLY

A TC+CD - 4 órás program

1. **a.)** Oldjuk meg a természetes számok körében a $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{32}$ egyenletet.

b.) Bizonyítsuk be, hogy az $\overline{ababab}$ alakú hatjegyű számoknak nem lehet kétjegyűnél nagyobb prímtényezője.

2. Oldjuk meg az $\left[2\sqrt{2011}\cdot x\right]\cdot\left\{2\sqrt{2011}\cdot x\right\}=2011x^2-1$ egyenletet, ahol $[a],\{a\}$ az a szám egész-, illetve törtrészét jelenti.

3. Tekintsük az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatot, amelyben $a_1=1$, $a_2=2$ és $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n, n\geq 1$.

a.) Mutassuk ki, hogy a $b_n=a_{n+1}-a_n$ képlettel értelmezett $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat, egy mértani haladvány.

b.) Határozzuk meg az a_n-et.

4. **a.)** Az ABC háromszög BC oldalán felvesszük az M pontot úgy, hogy $\overrightarrow{MB}=\lambda\overrightarrow{MC}$. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{1-\lambda}\left(\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AC}\right)$.

b.) Az ABC derékszögű háromszögben $m(\sphericalangle A)=90^0$ jelöljük *M, N* és *P*-vel az *A* csúcsból húzott magasság-, szögfelező- illetve oldalfelező talppontját.

Alkalmazva az **a.)** pontot fejezzük ki az $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}$ és $\overrightarrow{AP}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok segítségével.

c.) Ha *a, b, c* az *ABC* derékszögű háromszög oldalhosszai mutassuk ki, hogy igaz az $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\cdot\overrightarrow{AM}+\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]\cdot\overrightarrow{AP}$ összefüggés.

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.